

Por lo tanto, mientras que $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ no existe, es correcto escribir (véase la gráfica en la figura 7)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$$

Creemos que usted encontrará muy razonable el siguiente teorema.

Teorema A

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

La figura 10 debe darle una comprensión adicional. Dos de los límites no existen, aunque todos, excepto uno de los límites unilaterales, existen.

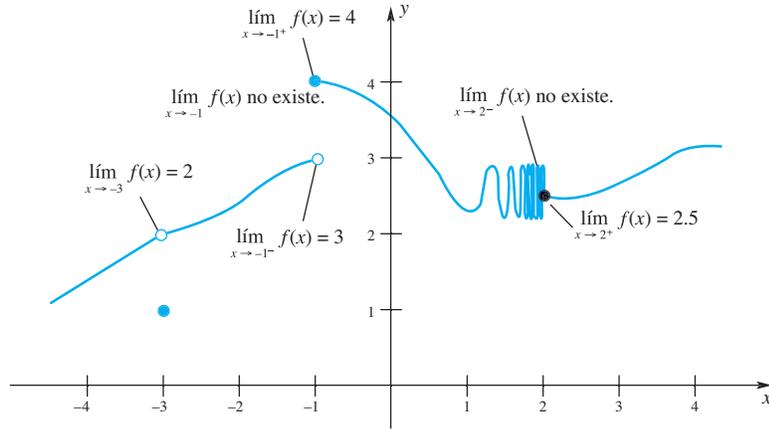


Figura 10

Revisión de conceptos

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de L , cuando x está suficientemente cerca (pero es diferente) de c .
- Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ donde $f(3)$ está indeterminada. Sin embargo, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ _____.
- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está cerca de L cuando x se aproxima a c por la derecha.
- Si $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = M$ y $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = M$, entonces _____.

Conjunto de problemas 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine el límite que se indica.

- $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 5)$
- $\lim_{t \rightarrow -1} (1 - 2t)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2t - 1)$
- $\lim_{t \rightarrow -1} (t^2 - 1)$
- $\lim_{t \rightarrow -1} (t^2 - x^2)$

En los problemas del 7 al 18 determine el límite que se indica. En la mayoría de los casos, es buena idea usar primero un poco de álgebra (véase el ejemplo 2).

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- $\lim_{t \rightarrow -7} \frac{t^2 + 4t - 21}{t + 7}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -t} \frac{x^2 - t^2}{x + t}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
- $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(t+4)(t-2)}^4}{(3t-6)^2}$
- $\lim_{t \rightarrow 7} \frac{\sqrt{(t-7)}^3}{t-7}$

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{(x-3)^2}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$
- $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{(3u+4)(2u-2)^3}{(u-1)^2}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

GC En los problemas del 19 al 28 utilice una calculadora para encontrar el límite indicado. Utilice una calculadora gráfica para trazar la función cerca del punto límite.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \text{sen } x)^2}{x^2}$
- $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{\text{sen}(t - 1)}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \text{sen}(x - 3\pi/2)}{x - \pi}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(x - \pi/4)^2}{(\tan x - 1)^2}$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{2t}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \text{sen}(x - 3) - 3}{x - 3}$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cot t}{1/t}$
- $\lim_{u \rightarrow \pi/2} \frac{2 - 2 \text{sen } u}{3u}$

29. Para la función f que se grafica en la figura 11 determine el límite que se indica o el valor de la función, o establezca que el límite o el valor de la función no existe.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ (b) $f(-3)$ (c) $f(-1)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (e) $f(1)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (h) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

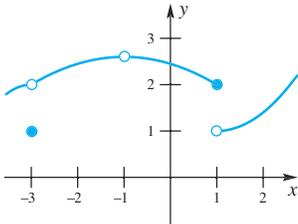


Figura 11

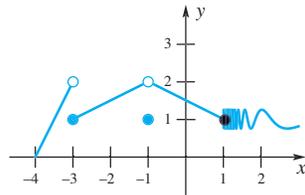


Figura 12

30. Siga las instrucciones del problema 29 para la función que se grafica en la figura 12.

31. Para la función que se grafica en la figura 13 determine el límite que se indica o el valor de la función, o bien, indique que no existe.

- (a) $f(-3)$ (b) $f(3)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

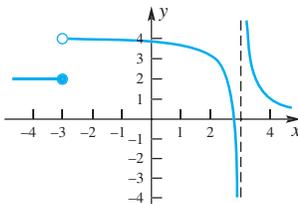


Figura 13

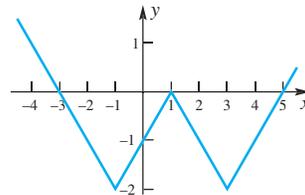


Figura 14

32. Para la función que se grafica en la figura 14 determine el límite que se indica o el valor de la función, o indique que no existe.

- (a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
 (d) $f(-1)$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (f) $f(1)$

33. Bosqueje la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Luego determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 (c) $f(1)$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

34. Bosqueje la gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Después determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (b) $g(1)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

35. Bosqueje la gráfica de $f(x) = x - [x]$; luego encuentre cada uno de los siguientes o establezca que no existen.

- (a) $f(0)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- (c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$

36. Siga las instrucciones del problema 35 para $f(x) = x/|x|$.

37. Determine $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/|x - 1|$ o establezca que no existe.

38. Evalúe $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+2} - \sqrt{2})/x$. *Sugerencia:* racionalice el numerador multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x+2} + \sqrt{2}$.

39. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Determine cada valor, si es posible.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

40. Bosqueje, como mejor pueda, la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes.

- (a) Su dominio es el intervalo $[0, 4]$.
 (b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ (f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

41. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x^4 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

42. La función $f(x) = x^2$ ha sido cuidadosamente graficada, pero durante la noche un visitante misterioso cambió los valores de f en un millón de lugares diferentes. ¿Esto afecta al valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en alguna a ? Explique.

43. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{|x-1|} \right]$

44. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x - [x]}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [1/x]$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(-1)^{[1/x]}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x](-1)^{[1/x]}$

45. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x[1/x]$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2[1/x]$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} ([x] + [-x])$ (d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} ([x] + [-x])$

46. Determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 3} [x]/x$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x]/x$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1.8} [x]$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1.8^+} [x]/x$

[CAS] Muchos paquetes de software tienen programas para calcular límites, aunque usted debe ser cuidadoso porque no son infalibles. Para adquirir confianza en su programa, utilícelo para volver a calcular algunos límites en los problemas del 1 al 28. Después para cada uno de los siguientes determine el límite o establezca que no existe.

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ 48. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
 49. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|}$ 50. $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^x$